연구논문집 제2권 p.89—94 1977

$L^p(-\infty,\infty)$空間에서의 (C_o)半群의 生成作用素및 Resolvent.

朴 鍾 烈
教 養 科

〈要 約〉

本論文에서는 $C[-\infty,\infty]$에서의 (C_0)半群의 生成作用素와 Resolvent를 $L^p(-\infty,\infty)$에서 조사하였으며 §1에서는 (C_0)半群의 生成作用素가 調密이고 閉作用素이며 §2에서는 生成作用素의 Resolvent에 對하여 §3에서는 $C[-\infty,\infty]$에서의 (C_0)半群의 生成作用素 및 Resolvent를 $L^p(-\infty,\infty)$에서 고찰하였다.

Infinitesimal generator and Resolvent of (C_0) semigroup on $L^p(-\infty,\infty)$

Park, Jong Yeoul
Dept. of Basic Studies

<Abstract>

In this paper, we shall develop the-theory of the infinitesimal generator and resolvent of (C_0) semigroup on $L^p(-\infty,\infty)$ rather than on $C[-\infty,\infty]$. In section 1, the infinitesimal generator is dense and closed. In section 2, we consider the resolvent of infinitesimal generator. In section 3, we investigated the infinitesimal generator and resolvent on $L^p(-\infty,\infty)$.

I. 序 論

$\lim_{u\to\infty} x(u)$, $\lim_{u\to-\infty} x(u)$가 存在해서 有限確定인 $(-\infty,\infty)$上의 連續函數 全體를 $C[-\infty,\infty]$로 表示하고 $x(\cdot)\in C[a,b]$, $y(\cdot)\in C[a,b]$의 合 $(x+y)(\cdot)$, 및 $(\alpha x)(\cdot)$ (α는 實數)을 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$, $(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$으로 定義하고 또한 $x(\cdot)\in C[a,b]$의 norm $\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$으로 定義하면 $C[a,b]$은 實 Banach 空間이다.

$C[-\infty,\infty]$上의 線形作用素 $T(t)(t\geqq0)$을 $[T(t)x](u)=(\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/t}x(u+v)dv(t>0)$

$T(0)=I$으로 定義할 때 $\{T(t);\ t\geqq0\}$을 (C_0) 半群, $\|T(t)\|\leqq1(t\geqq0)$이 成立하며 (C_0)半群 $\{T(t);\ t\geqq0\}$의 生成作用素및 Resolvent을 [4]에 依하여 證明된 것을 여기서는 $L^p(-\infty,\infty)$空間 $(1\leqq p<\infty)$ 즉 可測函數 $x(t)$가 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^p dt<\infty$을 만족할때 $x(t)$은 $(-\infty,\infty)$上에서 p승 Lebesgue 積分可能으로서 $(-\infty,\infty)$上의 p승 Lebesgue積分 可能인 實數値函數 全體을 $L^p(-\infty,\infty)$으로 나타내고, $x,y\in L^p(-\infty,\infty)$에 對하여 $x(t)=y(t)$ $(a.e.t)$일때 x와 y는 同値라하고 $x+y$, $\alpha x(\alpha)$(α은實數)을 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$, $(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$으로 定義하고, $x\in L^p(-\infty,\infty)$의 Norm $\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}$으로 定義하면 $L^p(-\infty,\infty)$은 Banach 空間이다.

이 $L^p(-\infty,\infty)$에서 上에서 定義한 線形作用素 $T(t)$ $(t\geqq0)$의 (C_0) 半群및 生成作用素, Resolvent 등을 조사하였다.

$\{T(t);t\geqq0\}$이 (C_0) 半群이란 것은 다음의 條件을 만족할 때이다.

i) 各 $t>0$에 對하여, $T(t)$은 X에서 自身으로의 有界線形作用素이고,

ii) $T(t+s)=T(t)T(s)(t,s>0)$, $T(0)=I$,

iii) 各 $x\in X$에 對하며

$\lim_{s\to t} T(s)x=T(t)x$ $(t\geqq 0, x\in X)$이 成立할 때이다.

例를 들면 $[T(t)x](u)=x(t+u)$ $(x\in C[0,\infty])$으로 $T(t)$ $(t\geqq 0)$으로 定義하면 $\{T(t);\ t\geqq 0\}$은 半群이고 $\|x\|=\sup_{0\leqq u<\infty}|x(u)|$ $(x\in C[0,\infty))$으로 定義하면 $\|T(t)\|=1$ $(t\geqq 0)$이다.

Ⅱ. 半羣의 生成作用案

定義 2·1. $\{T(t);t\geqq 0\}$을 半群으로서 $A_h=h^{-1}(T(h)-I)(h>0)$으로 둘때 $\lim_{h\to 0+} A_h x$가 存在해서 各 x에 對하여 $Ax=\lim_{h\to 0+} A_h x$으로 定義할 때 이 作用素 A을 半群의 生成作用素라 한다.

定理 2.1. A가 (C_0) 半群 $\{T(t);\ t\geqq 0\}$의 生成作用素이면

$$\frac{dT(t)}{dt}x=AT(t)Ax=T(t)Ax(x\in D(A), t\geqq 0).$$

證明 $t=0$이면 分明하므로 $t>0$라 하면 $0<h<t$ 되는 h에 對하여

(2.1) $h^{-1}[T(t+h)x-T(t)x]=A_hT(t)x=T(t)A_hx,$

(2.2) $-h^{-1}[T(t-h)x-T(t)x]=T(t-h)A_hx$ $(x\in X).$

各 $x\in X$에 對하여 $T(t)x$가 $[0,\infty]$上에서 强連續이므로, $\|T(s)\|\leqq M_t$ $(0\leqq s\leqq t)$되는定數 $M_t>0$을 선택할 수 있다. 지금 $x\in D(A)$라하면, $A_hx\to Ax$ $(h\to 0+)$이므로 (2.1)로부터

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}[T(t+h)x-T(t)x]=AT(t)x=T(t)Ax.$$

한편 $\|T(t-h)A_hx-T(t)Ax\|$

$$\leqq\|T(t-h)\|\|A_hx-Ax\|+\|T(t-h)Ax-T(t)Ax\|$$
$$\leqq M_t\|A_hx-Ax\|+\|T(t-h)Ax-T(t)Ax\|$$
$$\longrightarrow 0\text{이므로}$$

(2.2)로부터

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax.$$

따라서 $\dfrac{dT(t)x}{dt}=AT(t)x=T(t)Ax.$

$$(t>0, x\in D(A)).$$

定理 2.2. (C_0)半群 $\{T(t);t\geqq 0\}$의 生成作用素를 A라하면 $D(A)$은 X에서 稠密이다.

證明 $(v(t,x))=t^{-1}\int_0^t T(s)xds$ $(t>v, x\in X)$라 할 때 $\lim_{t\to 0+} v(t,x)=x$ $(x\in X)$이다.

$\{v(t,x);\ t>0, x\in X\}$는 x에서 稠密이므로 $\{v(t,x);\ t>0, x\in X\}\subset D(A)$을 證明하면 $D(A)$은 X에서 稠密이다. 그러므로 任意의 $v(t,x)$에 對하여

$$A_hv(t,x)=h^{-1}(T(h)-I)\Big[t^{-1}\int_0^t T(s)xds\Big]$$
$$=(th)^{-1}\Big[\int_0^t T(s+h)xds-\int_0^t T(s)xds\Big]$$
$$=(th)^{-1t}\Big[\int_h^{t+h}T(s)xds-\int_0^t T(s)xds$$
$$=t^{-1}\Big[h^{-1}\int_t^{t+h}T(s)xds-h^{-1}\int_0^h T(s)xds\Big]$$
$$\longrightarrow t^{-1}[T(t)x-x](h\to 0+).$$

따라서 $v(t,x)\in D(A)$ $(t>0, x\in X)$.

定理 2.3. (C_0)半群 $\{T(t);\ t\geqq 0\}$의 生成作用素 A은 閉作用素이다.

證明 A가 閉作用素인 것을 證明할려면 $x_n\in D(A)$ $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$, 또한 $\lim_{n\to\infty} Ax_n=y_0$라하면 定理 2.1로부터 $dT(t)x/dt=AT(t)x=T(t)Ax(x\in D(A), t\geqq 0)$의 양변을 0에서 $h(>0)$까지 積分하면

$$T(h)x-x=\int_0^h T(t)Axdt\ \ (x\in D(A)).$$

따라서

$$T(h)x_n-x_n=\int_0^h T(t)Ax_ndt(h>0, n\geqq 1).$$

여기서 $n\longrightarrow\infty$라하면

$$T(h)x_0-x_0=\int_0^h T(t)y_0dt(k>0).$$

定理 2.1의 證明中에서 $\|T(t)\|\leqq M_h$ $(0\leqq t\leqq h)$인 定數 M_h가 存在하므로

$$\Big\|\int_0^h T(t)Ax_ndt-\int_0^h T(t)y_0dt\Big\|$$
$$\leqq\int_0^h\Big\|T(t)(Ax_n-y_0)\Big\|dt$$
$$\leqq hM_h\|Ax_n-y_0\|$$
$$\to 0(n\to\infty)$$

그러므로

$$A_hx_0=h^{-1}(T(h)x_0-x_0)$$
$$=h^{-1}\int_0^h T(t)y_0dt$$
$$\longrightarrow y_0(h\to 0+)\text{이므로}$$

$x_0\in D(A)$, 또한 $y_0=Ax_0$.

結局 $x_n\in D(A)$, $\lim_{n\to\infty} x_n=y_0$, $\lim_{n\to\infty} Ax_n=y_0$ 이면, $x_0\in D(A)$이고 $y_0=Ax_0$이다.

따라서 A은 閉作用素이다.

Ⅲ. 生成作用家의 Resolvent.

X은 複素數 Banch 空間으로서 그의 係數空間으로서 그의 係數體는 Φ로 나타내면 T을 $D(T)\subset X$

에서 $R(T)\subset Y$의 線形作用數라하고 이때 $T_\lambda=\lambda I-T$ ($\lambda\in\Phi$, I은 X에 주어진 恒等作用素)은 $D(T)$에서 定義한 線形作用素이다.

定義 3.1. $T_\lambda=\lambda I-T$에서 T_λ^{-1}가 存在해서 $D(T_\lambda^{-1})$은 X에서 稠密이고 또한 T_λ^{-1}가 有界作用素인 λ全體을 $\rho(T)$로 나타내고 T의 Resolvent의 集合이라고 $R(\lambda;\ T)=T_\lambda^{-1}=(\lambda I-T)^{-1}$ $(\lambda\in\rho(T))$을 T의 Resolvent라 한다.

定理 3.1. T을 $D(T)\subset X$에서 $R(T)\subset X$으로의 閉作用素라하면 $\lambda\in\rho(T)$일 必要充分條件은 T_λ^{-1}가 存在해서 또한 $D(T_\lambda^{-1})=X$이고 $R(\lambda;\ T)$은 X에서 自身으로의 有界線形作用素이다.

證明 T가 閉作用素이므로 $T_\lambda=\lambda I-T$도 閉作用素이고 $\lambda\in\rho(T)$이면 定義로부터 T_λ^{-1}가 存在해서 $D(T_\lambda^{-1})$은 X에서 稠密이고 또한 T_λ^{-1}은 有界이다. T_λ가 閉作用素이므로 T_λ^{-1}가 閉作用素인 것은 分明하고 $D(T_\lambda^{-1})=X$되는것을 나타낼려면 任意의 $x\in X$에 對하여 $D(T_\lambda^{-1})$가 X에서 稠密이므로 $x_n\to x(n\to\infty)$되는 $D(T_\lambda^{-1})$의 數例 $\{x_n\}$을 선택할 수 있다. $y_n=T_\lambda^{-1}x_n$이라 놓으면 $\{y_n\}$은 Cauchy數例이다. 왜냐하면

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|&=\|T_\lambda^{-1}x_n-T_\lambda^{-1}x_m\|\\&\leqq\|T_\lambda^{-1}\|\|x_n-x_m\|.\\&\longrightarrow 0(n,m\to\infty).\end{aligned}$$

X가 完備이므로 $\lim_{n\to\infty} y_n=y$ 되는點 $y\in X$가 存在한다. 따라서 $D(T_\lambda^{-1})=X$이다. 逆으로 T_λ^{-1}가 存在해서 $D(T_\lambda^{-1})=X$이면 T_λ^{-1}은 X全體에서 定義한 閉作用素이므로 閉 Grap의 定理로부터 $T_\lambda^{-1}\in B(X)$ 그러므로 $\lambda\in\rho(T)$.

定理 3.2. T을 $D(T)\subset X$에서 $R(T)\subset X$으로의 閉作用素이고 $\lambda,\mu\in\rho(T)$이면

$$R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T)=-(\lambda-\mu)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)$$

이 成立한다.

證明
$$\begin{aligned}R(\lambda;\ T)x&=R(\lambda;\ T)(\mu I-T)R(\mu;\ T)x\\&=R(\lambda;\ T)[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)]R(\mu;T)x\\&=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)x\\&\quad+R(\lambda;\ T)(\lambda I-T)R(\mu;\ T)x\\&=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)x\\&\quad+R(\mu;\ T)x\ (x\in X).\end{aligned}$$

그러므로 $R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T)$
$$=-(\lambda-\mu)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)\text{이다.}$$

定理 3.3. 函數 $f(t)$가 $[0,\infty)$에서

$$f(t+s)\leqq f(t)+f(s)\ (t,s\geqq 0) \tag{3.1}$$

을 만족하고 또한 任意의 有界區間에서 有界이면 $\mu_0=\inf_{t>0} f(t)/t$은 有限値 또는 $-\infty$이고 또한 $\mu_0=\lim_{t\to\infty} f(t)/t$이다.

證明 $\mu_0=\inf_{t>0} f(t)/t$가 有限値 또는 $-\infty$은 分明하다. 任意의 $\mu>\mu_0$에 對하여 $f(t_\mu)/t_\mu<\mu$되는 t_μ가 存在한다.

各 $t>0$은 $t=n(t)t_\mu+s$ $(n\geqq 0)$, $0\leqq s<t_\mu$으로 나타낼수 있으므로 $f(t+s)\leqq f(t)+f(s)(t,s\geqq 0)$으로 부터
$$\begin{aligned}f(t)=f(n(t)t_\mu+s)&\leqq f(n(t)t_\mu)+f(s)\\&\leqq n(t)f(t_\mu)+f(s).\end{aligned}$$

f은 $[0,t_n]$에서 有界이므로 $f(s)\leqq M_\mu$ $(0\leqq s\leqq t_\mu)$을 만족하는 定數 M_μ가 存在한다.

따라서 $f(t)/t\leqq n(t)f(t_\mu)/t+M_\mu/t$
$$=\frac{f(t_\mu)}{t_\mu+s/n(t)}+M_\mu/t.$$

$t\longrightarrow\infty$일때 $s/n(t)\longrightarrow 0$이므로

$\limsup_{t\to\infty} f(t)/t\leqq f(t_\mu)/t_\mu<\mu$ $(\mu>\mu_0)$은 任意이므로

$\limsup_{t\to\infty} f(t)/t\leqq\mu_0$.

한편 $\mu_0=\inf_{t>0} f(t)/t\leqq\liminf_{t\to\infty} f(t)/t$.

定理 3.4. $\{T(t);\ t\geqq 0\}$가 (C_0) 半群이면

i) $w_0=\lim_{t\to\infty}\log\|T(t)\|$가 存在해서 w_0가 有限値 또는 $-\infty$,

ii) 各 $w>w_0$에 對하여, $\|T(t)\|\leqq M_we^{wt}(t\geqq 0)$인 定數 $M_w>0$가 存在한다.

證明 $\|T(t)\|$은 任意의 有界區間에서 有界이므로 $f(t)=\log\|T(t)\|$ $(\|T(t)\|\neq 0)$, $=-\infty(\|T(t)\|=0)$은 任意의 有界區間에서 有界이다.

$\|T(t+s)\|=\|T(t)T(s)\|\leqq\|T(t)\|\|T(s)\|$이므로 f은 (3.1)을 만족하므로 定理 3.3으로부터 i)이 成立한다.

ii) $w>w_0$일때 i)로부터 $\|T(t)\|\leqq e^{wt}(t\geqq t_w)$인 t_w가 存在한다. $\|T(t)\|$가 $[0,t_w]$에서 有界이므로
$$\sup_{0\leqq t\leqq t_w}\|T(t)\|e^{-wt}<\infty.$$
$$M_w=\text{mat }1,\ \sup_{0\leqq t\leqq t_w}\|T(t)\|_e^{-wt}\text{이면 成立한다.}$$

定理 3.5. A을 (Co)半群의 生成作用素이고, $R_e\lambda>w_0$ ($R_e\lambda$은 λ의 實部)이면 $\lambda\in\rho(A)$이고
$$R(\lambda;\ A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\ \ (x\in X).$$

證明 $Re\lambda>w>w_0$인 w라 하면 上의 定理 3.4로부터 $\|T(t)\|\leqq M_we^{wt}(t\geqq 0)$을 만족하는 定數 $M_w>0$가 存在한다.

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\|\leqq e^{-(Re\lambda)t}\|T(t)\|\|x\|$$
$$\leqq M_w e^{-(Re\lambda-w)t}\|x\|\epsilon L(0,\infty),$$

또한 $T(t)x$은 $(0,\infty)$에서 强連續이므로 $e^{-\lambda t}T(t)x$은 $(0,\infty)$에서 積分가능이므로

$R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ $(R_e\lambda>w_0, x\epsilon X)$라 놓으면

$$\|R(\lambda)x\|\leqq\int_0^\infty\|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt$$
$$\leqq M_w(R_e\lambda-w)^{-1}\|x\| \quad (x\epsilon X)\text{이므로}$$

$R(\lambda)$은 X에서 自身으로의 有界線形作用數이다.

$x\epsilon X$에 對하여

$$A_hR(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}A_hT(t)xdt$$
$$=h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt-\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$
$$=h^{-1}(e^{\lambda h}-I)\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt-h^{-1}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt$$
$$\longrightarrow\lambda R(\lambda)x-x(h\rightarrow 0+)$$

따라서 $R(\lambda)x\epsilon D(A)$, 또한 $AR(\lambda)x=\lambda R(x)x-x$ 즉,

$$(3.2)\qquad (\lambda-A)R(\lambda)x=x \quad (x\epsilon X)$$

다음에 $x\epsilon D(A)$이면

$A_hR(\lambda)x=R(\lambda)A_hx\rightarrow R(\lambda)Ax(p\rightarrow 0)$이므로

$AR(\lambda)x=R(\lambda)Ax$ $(x\epsilon D(A))$.

(3.2)로부터

$$(3.3)\qquad R(\lambda)(\lambda-A)x=x \quad (x\epsilon D(A)).$$

(3.2) (3.3)으로 부터

$$(\lambda-A)^{-1}=R(\lambda) \quad (\in B(x)).$$

즉 $\lambda\epsilon\rho(A)$로서,

$$R(\lambda;\ A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \quad (x\epsilon X).$$

Ⅳ. $L^p(-\infty,\infty)$에서 (Co) 半群

定理 3.1. $1\leqq p<\infty$라 하고 $L^p(-\infty,\infty)$에서의 $T(t)(t\geqq 0)$을 $[T(t)x](u)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}x(u+v)\,dv$ $(t>0)$, $T_{(0)}=I$ 으로 定義하면, $\{T(t);\ t\geqq 0\}$은 (Co)半群이고 $\|T(t)|\leqq 1(t\geqq 0)$이다.

證明 $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$으로서, $t>0$라하면

$$\left|\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}x(u+v)dv\right|^p$$
$$=\left|\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}(\frac{1}{q})}e^{-\frac{v^2}{t}(\frac{1}{p})}x(u+v)dv\right|^p$$
$$\leqq\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\right]^{\frac{p}{q}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}|x(u+v)|^p dv\text{이므로}$$

$$\|[T(t)x\|=\left(\int_{-\infty}^\infty|[T(t)x](u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqq(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\int_{-\infty}^\infty|x(u+v)|^p du\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\|x|\|$$
$$=\|x\|(x\epsilon L^p(-\infty,\infty)).$$

그러므로 $T(t)$은 $L^p(-\infty,\infty)$에서 $L^p(-\infty,\infty)$으로의 有界線形作用素로서 $\|T(t)\|\leqq 1$이다.

$$(T(t)x)(u)-x(u)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}[x(u+v)-x(u)]dv$$

이므로 上과 같이 計算하면

$$\|T(t)x-x\|\leqq(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}dv\int_{-\infty}^\infty|x(u+v)-x(u)|^p du\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv\right]^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv\int_{-\infty}^\infty|x(u+\sqrt{t}v)-x(u)|^p du\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

그런데 $\int_{-\infty}^\infty|x(u+\sqrt{t}v)-x(u)|^p du\leqq 2\|x\|^p$ 이므로

$$\int_{-\infty}^\infty|x(u+\sqrt{t}\,v-x(u)|^p\,du\longrightarrow 0 \quad (t\longrightarrow 0)$$

Lubesgue의 收斂定理로부터,

$\lim\limits_{t\rightarrow 0+}\|T(t)x-x\|=0, x\in L^p(-\infty,\infty)$이다.

다음에 $T(t+s)=T(t)T(s)$ 證明할려면

$$(T(t)(T(s)x)(u)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}\left[(\pi s)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{w^2}{s}}x(u+v+w)dw\right]dv$$
$$=(\pi^2 ts)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v2}{t}}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-(w-v)2/s}x(u+v)\right]dw$$
$$=\int_{-\infty}^\infty(\pi^2 ts)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}e^{-(w-v)2/s}dv\right]x(u+w)\,dw.$$

따라서

$$(\pi^2 ts)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{t}}e^{-(w-v)^2/s}\,dv$$
$$=[\pi(t+s)]^{-\frac{1}{2}}e^{-w^2/t+s}\text{ 으로부터}$$

$$(T(t)\,(T(s)x)\,(u)=[\pi(t+s)]^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-w^2/t+s}x(u+w)dw$$
$$=[T(t+s)x](u).$$

그러므로 $T(t)T(s)=T(t+s)$이다.

定理 3.2. $1\leqq p<\infty$라 하고 $L^p(-\infty,\infty)$上의 作

用素 $T(t)(t\geqq o)$을 $[T(t)x](u)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{t}}$ $x(u+v)\,dv$ $(t>v)$, $T(o)=I$으로 定義하면

i) $D(A)=\{x(u)\in L^p(-\infty,\infty);\ x(u), x'(u)$은 絶對連續, 또한 $x'(u)$및 $x''(u)\in L^p(-\infty,\infty)\}$,

ii) $[Ax](u)=\frac{1}{4}x''(u)$ (a,e,u)이다.

證明 $\|T(t)\|=1(t\geqq 0)$으로부터 $w_o=o$, 定理 3.5로부터, $\{\lambda;\ R_e\lambda>o\}\subset\rho(A)$,

$R(\lambda;\ A)x=\int_o^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$ $(R_e\lambda>o)$

$x\in L^p(-\infty,\infty)$, 上의 定義式을 代入하면

$$[R(\lambda;\ A)x](u)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\Big[(\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{t}}x(u+v)\,dv\Big]dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(u+v)\Big[\int_0^{\infty}(\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t-v^2/t}dt\Big]dv.$$

$\lambda>o$일때,

$$\int_o^{\infty}(\pi t)^{-1/2}e^{-\lambda t-(v^2/t)}\,dt=2(\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_o^{\infty}e^{-s^2-(\lambda v^2/s^2)}\,ds$$
$$=e^{-2\sqrt{\lambda}|v|}/\sqrt{\lambda}\text{이므로}$$

$$[R(\lambda;\ A)x](u)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\sqrt{|\lambda|}|v|}x(u+v)dv$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\sqrt{\lambda}|u-v|}x(v)dv.$$

여기서 $\lambda=1$으로서 $y(u)=[R(1;A)x](u)$으로두면

$$y(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|u-v|}x(v)dv=e^{2u}\int_u^{\infty}e^{-2v}x(v)dv+e^{-2u}\int_{-\infty}^{u}e^{2v}x(v)dv$$

$$y'(u)=2\Big(e^{2u}\int_u^{\infty}e^{-2v}x(v)dv-e^{-2u}\int_{-\infty}^{u}e\,x(v)dv\Big),$$

$|y'(u)|\leqq 2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|u-v|}|x(v)|dv$으로부터

$\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|y'(u)|^pdu\Big]^{1/p}\leqq 2\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|x|v)|^pdv\Big]^{1/p}$을 얻는다.

$y''(u)=4y(u)-4x(u)\in L^p(-\infty,\infty)=X$.

$D(A)=R(1;\ A)[X]$이므로 i)이 證明되었다.

다음에 $[T(h)x-x](u)=(th)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/h}[x(u+v)-x(u)]\,du$

$$=\frac{1}{2}(\pi h)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/h}[x(u+v)+x(u-v)-2x(u)]\,du.$$

$x(u)$, $x'(u)$은 絶對連續으로서 또한 $x''(u)\in L^p(-\infty,\infty)$되는 $x(u)\in L^p(-\infty,\infty)$라 하면

$$h^{-1}[T(h)x-x](u)-\frac{1}{4}x''(u)$$
$$=\frac{h^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2/h}\,[\{x(u+v)+x(u-v)-2x(u)\}-v^2x''(u)]\,dv.$$

$$g(u,v)=\{x(u+v)+x(u-v)-2x(u)\}/v^2-x''(u)$$
$$=v^{-2}\int_0^{v}\Big[\int_{-w}^{w}(x''(u+\tau)-x''(u))d\tau\Big]dw$$
$$(u\in(-\infty,\infty), v/0),$$

$g(u,0)o=$ $(v\in(-\infty,\infty))$으로 두면,

$$h^{-1}[T(h(x-x]\ (u)-\frac{1}{4}x''(u)$$
$$=\frac{h^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-v^2/h}g(u,v)dv.$$

따라서 $\|g(.,v)\|=\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|g(u,v)|^pdu\Big]^{1/p}$가 $(-\infty,\infty)$에서 有界이고 $\lim_{v\to o}\|g(.,v)\|=0$이다. 왜냐하면, $v>0$일때

$$\|g(.,v)\|\leqq\Big[v^{-2}\int_0^{v}dw\int_{-w}^{w}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}|x''(u+\tau)-x''(u)|^pdu\Big]^{1/p}$$

이므로 任意의 $\varepsilon>0$에 對하여 $\delta>0$을 선택해서, $|v|<\delta$이면

$\int_{-\infty}^{\infty}|x''(u+v)-x''(u)|^pdu<\varepsilon^p$이다.

따라서 $0<v<\delta$이면 $\|g(.,v)\|\leqq\varepsilon$, $g(u,-v)=g(u,v)$이므로 $\lim_{v\to 0}\|g(.,v)\|=0$.

다음에, $\|g(\cdot,v)\|\leqq 4\|x(\cdot)\|/v^2+\|x''(\cdot)\|$ $(v\neq 0)$으로부터 $\|g(\cdot,v)\|$은$(-\infty,\infty)$에서 有界.

$$\|h^{-1}[T(h)x-x]-\frac{1}{4}x''\|$$
$$=\frac{h^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}(v^2e^{-v^2/h})^{1/q}(v^2e^{-v^2/h})^{1/p}g(u,v)dv\Big|^p\,du\Big]^{1/p}$$
$$\leqq\frac{h^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-v^2/h}dv\Big]^{1/q}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-v^2/h}|g(u,v)|^pdvdu\Big]^{1/p}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}v^2\,e^{-v^2}dv\Big]^{1/q}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-v^2}\|g(\cdot,\sqrt{h}v)\|^pdv\Big]^{1/p},\quad \lim_{h\to 0+}\|g(\cdot,\sqrt{h}v\|=o(v\in(-\infty,\infty)),$$

$v^2e^{-v2}\|g(\cdot,\sqrt{h}v)\|^p\leqq Mv^2e^{-u^2}\in L(-\infty,\infty)$ 이므로 收斂定理로부터

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-v^2}\|g(\cdot,\sqrt{h}v)\|^p dv=0$$

따라서 $\|h^{-1}[T(h)x-x]=\frac{1}{4}x''\|\to 0(h\to 0+)$.

그러므로 $[Ax](u)=\frac{1}{4}x''(u)$ $(a.e.u)$을 얻는다.

參 考 文 獻

1. E. Hille-R.S. Phillips, Functional analysis and semi-group, American Mathemetical Society, New York, 1957.
2. I. Miyadera, Generation of semi-groups of nonlinear contraction, J. Math. Soc. Japan. Vol. 26, No. 3, 1974.
3. I. Miyadera, Semi-groups of Operatos in Frechet space and Applications to partial Differential Eduations, Tohoku Math. Jour. 2(1959) 162—183.
4. K. Yosida, Functional analysis, Springes, 1965.